文章编号:1009-4822(2023)02-000-09　　**DOI**:10. 11713/j. issn. 1009-4822. 2023. 02. 00

华罗庚的矩阵情结与矩阵“打洞”技术的应用

晏瑜敏[1,2],刘艳芳[3],杨忠鹏[1,2],林志兴[1,2],陈智雄[1,2],陈梅香[1,2]

(1. 应用数学福建省高校重点实验室(莆田学院),福建 莆田　351100;
2. 金融数学福建省高校重点实验室(莆田学院),福建 莆田　351100;
3. 闽南师范大学数学与统计学院,福建 漳州　363000)

摘要:在回顾华罗庚的数学研究与其一生的矩阵情结的关系的基础上,重点探讨了极具中国传统文化特色的矩阵打洞技术对矩阵理论研究与教学的深刻影响. 注意到矩阵打洞技术在近年来考研试题的广泛应用,指出“打洞”的反向 ——“补洞”技术是解决一些难题的强有力工具. 将打洞与补洞有机结合,对全面理解运用华罗庚学派的矩阵理论及应用是很有意义的.

关键词:华罗庚;矩阵;矩阵打洞;矩阵补洞;分块初等变换

中图分类号:O151. 21　　　**文献标志码**:A

Hua Loo-Keng's Matrix Complex and Applications of “Hole Drilling” Technology

YAN Yumin[1,2], LIU Yanfang[3], YANG Zhongpeng[1,2],
LIN Zhixing[1,2], CHEN Zhixiong[1,2], CHEN Meixiang[1,2]

(1. *Key Laboratory of Applied Mathematics of Fujian Province University*(*Putian University*), *Putian* 351100, *China*;
2. *Key Laboratory of Applied Mathematics of Fujian Province University*(*Putian University*), *Putian* 351100, *China*;
3. *College of Mathematics and Statistics*, *Minnan Normal University*, *Zhangzhou* 363000, *China*)

Abstract: On the basis of reviewing the relationship between Hua Loo-Keng's mathematical research and strong complex of matrix, this paper focuses on the profound influence of matrix hole drilling technology with Chinese traditional culture characteristics on the research and teaching of matrix theory. With the wide use of matrix hole-drilling technology in the postgraduate entrance examination questions in recent years, the reverse “Hole Filling” technology of “Hole Drilling” is pointed out to solve some difficult problems. Combining the “Hole Drilling” and “Hole Filling” technology organically will be significant to understand and apply the matrix theory of Hua system.

Key words: Hua Loo-Keng; matrix; matrix hole drilling; matrix hole filling; elementary transformation of block matrix

1　华罗庚的矩阵情结

华罗庚(1910—1985)是被学界公认的新中国数学的奠基人,是 2009 年被认定的“100 位新中国成立以来感动中国人物”,是蜚声中外的数学家. 在中国的广袤土地上,到处都留有他推广优选法与统筹法的

收稿日期:2022-07-02
基金项目:国家自然科学基金项目(61772292);福建省自然科学基金项目(2021J011103,2021J05238);莆田市科技局项目(2022SZ3001ptxy05);福建省教育改革项目(FBJG20210174);莆田学院教改项目(JG2022053).
作者简介:晏瑜敏(1972—),女,副教授,主要从事代数及其应用研究,E-mail:yyumin90@126. com;通信作者:杨忠鹏(1947—),男,教授,主要从事矩阵理论及其应用研究,E-mail:yangzhongpeng@126. com.

艰辛足迹,不愧被誉为“人民的数学家”.华罗庚先生“在学术上洞察之深、选材之妙、加工之巧、表达之神,确为深入浅出之典范、造诣精深之楷模,足以堪称是世界上伟大的数学家”[1].

华罗庚在解析数论、矩阵几何学、典型群、自守函数论、多复变函数论、偏微分方程、高维数值积分和应用数学等领域均取得具有世界影响的杰出成就[2].华罗庚曾说:“国外把我说(骂)成是玩矩阵的魔鬼,……,表面上你看我搞的多复变函数、偏微分方程,实际上骨子里还是我的矩阵技巧”[3-4].作为华罗庚的学生兼助教的著名数学家徐利治先生回忆说:“华先生很重视做学问需要有看家工夫,…….据华罗庚所说,他的扎实的看家工夫,主要来源于三部经典著作:一是克里斯托尔(G Chrystal)的《代数学》,二是兰道(E Landau)的《数论教程》(三大卷),三是特恩波尔(W H Turnbull)与爱德肯(A C Aitken)合著的《标准矩阵论》……,而《标准矩阵论》虽是一本薄薄的书,却是帮助他后来完成矩阵几何和复分析的巨大研究成果的基本工具.”“华先生操作矩阵运算就像是摆弄普通数字那样得心应手,因而能顺捷地得到了矩阵几何等方面的一系列极为优美的构造性成果,而为数学界所称道.”[5]1959年考进中国科技大学数学专业的冯克勤教授,做了两年的华罗庚的研究生,他回忆说道:“华罗庚多次对我们讲,他花了整整两年去念了Weyl的《群表示论》一书,一直到他认为真正念懂了,并且化成了自己的语言——矩阵,然后将其作为工具研究多复变函数,写了《典型域上调和分析》一书.” “华罗庚用纯熟的矩阵为工具,使他在数学的多个领域中都取得国际水平的成就,并使研究工作有他自己的特点.”[6]华罗庚主持的一个“不等式”讨论班,大家共同讨论RICHARD B[7]当时刚出版的一本关于不等式的书.在讨论班第一次课上,他说:“我叫你们念这本书是因为我不认为这本书写得很好.”他认为,用他精湛的矩阵技巧可以更系统地整理此书中许多矩阵不等式,将其归结于少数手段,使书中的内容看起来非常简单[6].

王元教授谈到华罗庚的深厚的矩阵功底时说:“虽然他已是著名的数论学家,但仍然结束了数论研究,另起炉灶,将矩阵几何、自守函数、典型群与多复变函数论放在一起研究,目标为将代数学与函数论的一些经典结果推广到矩阵空间.这一研究是将矩阵看成点的推广,需要不同的工具与方法.这就使他的数学研究出现了新局面.”[8]

1930年春,年少的华罗庚在上海《科学》杂志上发表的《苏家驹之代数的五次方程式解法不能成立之理由》轰动数学界.华罗庚在文章中指出苏的论文有一个12阶行列式计算错了[9].同年,清华大学数学系主任熊庆来了解到华罗庚的自学经历和数学才华后,打破常规,让华罗庚进入清华大学图书馆担任馆员.

综上可见,华罗庚对矩阵理论及其方法,有着惊人的透彻的把握、巧妙准确的应用能力.他与矩阵有着长久深厚的情结,由此形成了独具特性的研究方法.正如文献[4]说“矩阵技巧是华罗庚学派的基本手法和招数之一.”

矩阵理论虽然不是华罗庚的主要研究领域,但他纯熟的手法、透彻的直觉,把矩阵理论及方法应用到了极致.当然,他也在矩阵理论上有过贡献.在多复变分析的研究中,华罗庚(1955年)发现了一个矩阵恒等式,在此基础上,他给出了一个行列式不等式.这个结果最先发表在国内的《数学学报》,英文稿1963年发表在《Transl Amer Math Soc》[10-12].文章一发表就引起矩阵界的极大关注.著名数学家陈省身很快给出了高度的评价[13],MARCUS M,BELLMAN R,ANDO T等线性代数界名家介入了进一步的研究[14-16],因此也被称为“Hua-Marcus-Bellman-Ando inequalities”[11].至今60多年,该不等式仍然是被关注的热点研究问题(见文献[11,17-30]),这是很少见的现象.华罗庚不顾年老,在一生的最后三年时间里,以矩阵的特征值为基本工具,完成了经济领域最优化理论(见文献[31-32]),这些成果一直被当代人继续研究(见文献[33-34]).

如同冯克勤教授所说:“这一切表示出华罗庚的数学研究有一种鲜明的个性,具有从庞杂中看透本质的深刻洞察能力和一种数学大家的风范,体现着勇攀高峰的强烈创新精神.这种风格深深地影响了下几代而形成‘中国学派’.”[6]这其中华罗庚对矩阵的情结和熟练运用是一个重要的组成部分.

2 华罗庚与矩阵打洞技术

华罗庚又是一位优秀的教育家.1958年中国科技大学成立,华罗庚亲手创办了数学系,他是中国科学技术大学的数学系首任主任,给大学生上专业基础课[35].现任中国科学院院长、原任中国科技大学校长侯建国说道:“建校初期,华罗庚、吴有训、严济慈等老一辈科学家、教育家就身体力行,亲身为本科生讲授基础课.他们以渊博的学识、精湛的讲课艺术、高尚的师德,带出一批又一批杰出的年轻教员,培养了一届又

一届优秀学生. ”[36] 华罗庚的教学风格和方法,不仅使学生终身受益,而且具有鲜明的独特个性,给中国的大学基础课教学留下了宝贵的财富,其中矩阵打洞技术就是重要内容之一.

华罗庚的助教李炯生教授在文献[37-38]中明确指出“所谓矩阵打洞是指,把矩阵分块,然后经过适当地变换,使所得到的矩阵在某些指定的块为零子矩阵”. 许以超教授说:“打洞是矩阵计算中的最基本的技巧”[39]. 由于华罗庚及其弟子的辛勤努力,特别是华罗庚的深厚的中国传统文化底蕴,数学人将在中国民间流传已久的“龙生龙,凤生凤,老鼠的儿子会打洞”俗语,改造成形象生动、易懂易记的“龙生龙,凤生凤,华罗庚的弟子会打洞”口诀式的说法. 经过几代人的实践和交流,矩阵打洞技术已在中国的线性代数研究和教学中有了响亮的名称,已成为具有中国特色的矩阵技术. 这和华罗庚对矩阵深厚的把握能力有着密切的关系.

本文约定 $\mathbf{P}$ 为任意数域,$\mathbb{C}$ 与 $\mathbb{R}$ 分别为复数域、实数域,$\mathbf{P}^{n\times n}$ 为 $\mathbf{P}$ 上 $n\times n$ 阶矩阵集合,$\boldsymbol{I}(\boldsymbol{I}_n)$ 为($n\times n$ 阶)单位矩阵. 分别记 $\mathbf{P}$ 上矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩、转置、行列式及最小多项式为 $r(\boldsymbol{A})$、$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$、$|\boldsymbol{A}|$、$m_{\boldsymbol{A}}(x)$. $\mathbf{P}^n$ 为 $\mathbf{P}$ 上 n 维列向量的集合. 设 $\mathrm{O}^{n\times n}$ 为 $n\times n$ 正交矩阵的集合,记 $\mathrm{i}=\sqrt{-1}\in\mathbb{C}$.

命题 1[37-38]　设 $\boldsymbol{A}\in\mathbf{P}^{r\times r}$ 可逆,$\boldsymbol{B}\in\mathbf{P}^{r\times(n-r)}$,$\boldsymbol{C}\in\mathbf{P}^{(n-r)\times r}$,$\boldsymbol{D}\in\mathbf{P}^{(n-r)\times(n-r)}$,则有

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{I} & \boldsymbol{0}\\ -\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{I}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{I} & -\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{D}-\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{I} & \boldsymbol{0}\\ -\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{I}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{D}-\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{I} & -\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D}-\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}\end{pmatrix}.$$

命题 1 即 Schur 公式是四分块矩阵的初等变换基本形式.

徐利治教授主编的《大学数学解题诠释》的第3篇《线性代数》是由李炯生教授编写的,用2节共26个印刷页的篇幅(其中第 3. 4 节矩阵打洞与行列式计算,第 3. 5 节矩阵打洞与矩阵的秩),不仅给出了矩阵打洞的理论依据(见命题 1),而且分别以例 3. 4. 1 ~ 3. 4. 27、例 3. 5. 1 ~ 3. 5. 23 为例具体展示“矩阵打洞是线性代数和矩阵论中一种重要的技巧,不论在解题或者证明定理时都有着广泛应用”[40]. 这是文献[37]的进一步扩展. 文献[4,37-44]等表明,矩阵“打洞”技巧在高等代数、线性代数的教与学中起着重要作用. 文献[45-49]显示了矩阵打洞在学术研究中的价值. 上述文献的矩阵打洞方法均以四分块矩阵为主. 实际上矩阵打洞对任意分块矩阵也是有用的工具. Y. Tian 和 Styan 给出了三个幂等矩阵和的秩等式,并且指出 $k(>3)$ 个幂等矩阵和的秩等式是一个公开问题[50];文献[51]应用任意分块矩阵的打洞方法得到的命题 2,对公开问题[50]的解决起了重要作用.

命题 2[51]　设 $\boldsymbol{A}_i\in\mathbb{C}^{n\times m}$,$i=1,2,\cdots,k$,则有

$$r\left(\sum_{i=1}^{k}\boldsymbol{A}_i\right)=r(\boldsymbol{A})-\sum_{i=1}^{k}r(\boldsymbol{A}_i),\quad \boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{0} & \cdots & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}_1\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}_2 & \cdots & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}_2\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \cdots & \boldsymbol{A}_k & \boldsymbol{A}_k\\ \boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{A}_2 & \cdots & \boldsymbol{A}_k & \boldsymbol{0}\end{pmatrix}\in\mathbb{C}^{n(k+1)\times m(k+1)}. \tag{1}$$

证明:设

$$\boldsymbol{G}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_n & \boldsymbol{0} & \cdots & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I}_n & \cdots & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \cdots & \boldsymbol{I}_n & \boldsymbol{0}\\ -\boldsymbol{I}_n & -\boldsymbol{I}_n & \cdots & -\boldsymbol{I}_n & \boldsymbol{I}_n\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{S}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_m & \boldsymbol{0} & \cdots & \boldsymbol{0} & -\boldsymbol{I}_m\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I}_m & \cdots & \boldsymbol{0} & -\boldsymbol{I}_m\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \cdots & \boldsymbol{I}_m & -\boldsymbol{I}_m\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \cdots & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I}_m\end{pmatrix},$$

则有

$$\boldsymbol{GAS}=\operatorname{diag}\left(\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\cdots,\boldsymbol{A}_n,-\sum_{i=1}^{k}\boldsymbol{A}_i\right). \tag{2}$$

由式(2)可知,$r(\boldsymbol{A})=\sum_{i=1}^{k}r(\boldsymbol{A}_i)+r\left(\sum_{i=1}^{k}\boldsymbol{A}_i\right)$,由此知式(1)成立. 证毕.

后继的文献[52]沿用命题2及其矩阵打洞技术,得到了三幂等矩阵的相近结果.

3 矩阵打洞及其在考研试题中的应用

近年来与矩阵打洞技巧相关的题目在硕士研究生入学试题中经常可见.

例1[53] 1)(2020年中国科学院大学)设$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}\in\mathbb{R}^{n\times n}$,则$\begin{vmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{B}\\ -\boldsymbol{B} & \boldsymbol{A}\end{vmatrix}=|\boldsymbol{A}+\mathrm{i}\boldsymbol{B}||\boldsymbol{A}-\mathrm{i}\boldsymbol{B}|$.

2)(2015年武汉大学) ⅰ)证明$\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{C}-\boldsymbol{B} & \boldsymbol{C}\end{pmatrix}$可逆的充要条件是$\boldsymbol{AB}$可逆;ⅱ)若$\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{C}-\boldsymbol{B} & \boldsymbol{C}\end{pmatrix}$可逆,求出$\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{C}-\boldsymbol{B} & \boldsymbol{C}\end{pmatrix}$的逆.

3)(2011年湖南大学)设$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{b}\in\mathbb{R}^{n}$,若$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{bb}^{\mathrm{T}}$正定,则$\boldsymbol{A}$正定且$\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b}<1$.

4)(2018年厦门大学)设$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}\in\mathbf{P}^{n\times n}$,且$\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{B}^2=\boldsymbol{B}$,试证明

$$r(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})=r(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{AB})+r(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{AB}).$$

5)(2007年南开大学)设$\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{B}$为实正定矩阵,对任意$\boldsymbol{C}\in\mathbb{R}^{n\times n}$,求$r\left(\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{C}\\ -\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{B}\end{pmatrix}\right)$.

6)(2012年北京大学) i)若$\boldsymbol{A}$可逆,$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$.证明$\begin{vmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{A}\end{vmatrix}=|\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{B}^2|$;

ⅱ)若$\boldsymbol{A}$不可逆,$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$,结论是否成立?

ⅲ)如果$\boldsymbol{A}$可逆,$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$不成立,结论如何?

由命题1和$\begin{pmatrix}\boldsymbol{I} & \boldsymbol{0}\\ \mathrm{i}\boldsymbol{I} & \boldsymbol{I}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{B}\\ -\boldsymbol{B} & \boldsymbol{A}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{I} & \boldsymbol{0}\\ -\mathrm{i}\boldsymbol{I} & \boldsymbol{I}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}-\mathrm{i}\boldsymbol{B} & \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}+\mathrm{i}\boldsymbol{B}\end{pmatrix}$可得1).

从$\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{C}-\boldsymbol{B} & \boldsymbol{C}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{I} & -\boldsymbol{I}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{C}-\boldsymbol{B} & \boldsymbol{B}\end{pmatrix}$知$\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{C}-\boldsymbol{B} & \boldsymbol{C}\end{pmatrix}$可逆当且仅当$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$都可逆,由$\begin{pmatrix}\boldsymbol{I} & \boldsymbol{0}\\ -(\boldsymbol{C}-\boldsymbol{B})\boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{I}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{C}-\boldsymbol{B} & \boldsymbol{C}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{I} & -\boldsymbol{I}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{B}\end{pmatrix}$易得2)要求的逆矩阵.

由$\begin{pmatrix}\boldsymbol{I} & \boldsymbol{0}\\ -\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{b}\\ \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{I} & -\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b}\\ \boldsymbol{0} & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & 1-\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b}\end{pmatrix}$和$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{bb}^{\mathrm{T}}$正定,知$\boldsymbol{A}$正定且3)成立.

由4)知$\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})\boldsymbol{B}$,$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})$,$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B}-\boldsymbol{AB}^2=\boldsymbol{0}$,可对$\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B} & \boldsymbol{AB}-\boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{A}-\boldsymbol{AB} & \boldsymbol{0}\end{pmatrix}$打洞得$\mathrm{diag}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B},\boldsymbol{0})$;从

$$r\begin{pmatrix}\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{B} & \boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}-\boldsymbol{AB}\end{pmatrix}=r(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})\geqslant r(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{AB})+r(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{AB})\geqslant r(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})$$

得4)成立.

从对$\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{C}\\ -\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{B}\end{pmatrix}$合同打洞得$\mathrm{diag}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C})$,可得5)的结论$r\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{C}\\ -\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{B}\end{pmatrix}=r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C})=2n$.

由$\begin{pmatrix}\boldsymbol{I} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{I} & \boldsymbol{I}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{A}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{I} & \boldsymbol{0}\\ -\boldsymbol{I} & \boldsymbol{I}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B} & \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\end{pmatrix}$可得$\begin{vmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{A}\end{vmatrix}=|(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})|$;由ⅰ)证明没有涉及到$\boldsymbol{A}$的可逆性知,只要$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$,就有6)的ⅱ)成立;设$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & -1\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2 & 0\\ -1 & 3\end{pmatrix}$ $\boldsymbol{AB}\neq\boldsymbol{BA}$,知6)的ⅲ)未必成立.

例2 求下列矩阵的行列式[53-54](分别是2010年南京大学、2019年兰州大学、2013年中国科学院大学、2010年上海交通大学、2012年上海大学、2019年福州大学考研试题)

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1+a_1^2 & a_1a_2 & \cdots & a_1a_n\\ a_2a_1 & 1+a_2^2 & \cdots & a_2a_n\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_na_1 & a_na_2 & \cdots & 1+a_n^2\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{G}=\begin{pmatrix}a_1^2 & a_1a_2+1 & \cdots & a_1a_n+1\\ a_2a_1+1 & a_2^2 & \cdots & a_2a_n+1\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_na_1+1 & a_na_2+1 & \cdots & a_n^2\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1+a_1+b_1 & a_1+b_2 & \cdots & a_1+b_n\\ a_2+b_1 & 1+a_2+b_2 & \cdots & a_2+b_n\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_n+b_1 & a_n+b_2 & \cdots & 1+a_n+b_n\end{pmatrix}.$$

令 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^{\mathrm{T}}$,则 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I}+\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$;由

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{I} & \boldsymbol{0}\\ -\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{I} & -\boldsymbol{\alpha}\\ \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{I} & -\boldsymbol{\alpha}\\ \boldsymbol{0} & 1+\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}\boldsymbol{I} & \boldsymbol{\alpha}\\ \boldsymbol{0} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{I} & -\boldsymbol{\alpha}\\ \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}+\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} & 1\end{pmatrix}$$

得 $|\boldsymbol{I}+\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}|=|\boldsymbol{A}|=1+\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^2$.

设 $\boldsymbol{F}=\boldsymbol{e}\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{I},\boldsymbol{e}=(1,1,\cdots,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^{\mathrm{T}}$,得$|\boldsymbol{F}|=(-1)^{n-1}(n-1)$,$\boldsymbol{F}^{-1}=\dfrac{1}{n-1}(\boldsymbol{e}\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}-(n-1)\boldsymbol{I})$ 且 $\boldsymbol{G}=\boldsymbol{F}+\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$. 由命题1可知

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{I} & \boldsymbol{0}\\ -\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}^{-1} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{F} & -\boldsymbol{\alpha}\\ \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{F} & -\boldsymbol{\alpha}\\ \boldsymbol{0} & 1+\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}^{-1}\boldsymbol{\alpha}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\boldsymbol{I} & \boldsymbol{\alpha}\\ \boldsymbol{0} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{F} & -\boldsymbol{\alpha}\\ \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{F}+\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} & 1\end{pmatrix},$$

这样

$$|\boldsymbol{G}|=|\boldsymbol{F}|(1+\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}^{-1}\boldsymbol{\alpha})=|\boldsymbol{F}+\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}|=(-1)^{n-1}\left[(n-1)+\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)^2-(n-1)\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right].$$

设 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{I}_n+\boldsymbol{P}\boldsymbol{Q}$,其中,$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}a_1 & a_2 & \cdots & a_n\\ 1 & 1 & \cdots & 1\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n\end{pmatrix}$. 由

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_n & \boldsymbol{0}\\ -\boldsymbol{Q} & \boldsymbol{I}_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_n & -\boldsymbol{P}\\ \boldsymbol{Q} & \boldsymbol{I}_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_n & -\boldsymbol{P}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I}_2+\boldsymbol{Q}\boldsymbol{P}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_n & \boldsymbol{P}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I}_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_n & -\boldsymbol{P}\\ \boldsymbol{Q} & \boldsymbol{I}_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_n+\boldsymbol{P}\boldsymbol{Q} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{Q} & \boldsymbol{I}_2\end{pmatrix}$$

得

$$|\boldsymbol{B}|=\begin{vmatrix}1+\sum\limits_{i=1}^{n}a_i & n\\ \sum\limits_{i=1}^{n}a_ib_i & 1+\sum\limits_{i=1}^{n}b_i\end{vmatrix}=\left(1+\sum_{i=1}^{n}a_i\right)\left(1+\sum_{i=1}^{n}b_i\right)-n\sum_{i=1}^{n}a_ib_i.$$

例2涉及的行列式结构虽然相近,但结果有较大差别,但都可用矩阵打洞的方法来解决.

下面的命题3在目前教材上不太常见,也是2018年福州大学考研试题. 文献[55-56]给出的证法是有代表性的,文献[57]的挑战题即为其变形. 文献[55-57]基本上要用到目前多数教材没有涉及到的Cauchy-Binet公式.

命题3　设 $\boldsymbol{A}$ 为秩为 r 的 n 阶实对称矩阵,证明:1)$\boldsymbol{A}$ 有 r 阶主子式不为零;2)$\boldsymbol{A}$ 的 r 阶非零主子式皆同号.

证明:1) 设 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)$,由 $r(\boldsymbol{A})=r$ 可设 $\boldsymbol{\alpha}_{i1},\boldsymbol{\alpha}_{i2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{ir}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组的极大无关组,通过对 $\boldsymbol{A}$ 的列的初等变换,即有可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 使得 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r},\boldsymbol{0},\cdots,\boldsymbol{0})$,再设 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}\boldsymbol{S}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{A}_2 & \boldsymbol{0}\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{A}_1$ 是由 $\boldsymbol{A}$ 的第 $i_1,i_2,\cdots,i_r$ 行与列构成的 r 阶主子矩阵. 注意 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ 是对称的,可得

$$\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\mathrm{diag}(\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{0}),\quad r(\boldsymbol{A})=r=r(\boldsymbol{A}_1),\quad \boldsymbol{A}_1\in\mathbb{R}^{r\times r}.\tag{3}$$

2) 若 $\boldsymbol{B}_1$ 是由 $\boldsymbol{A}$ 的第 $j_1,j_2,\cdots,j_r$ 行与列构成的 $\boldsymbol{A}$ 的 r 阶主子矩阵,$|\boldsymbol{B}_1|\neq 0$,类似知有

$$\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\mathrm{diag}(\boldsymbol{B}_1,\boldsymbol{0}),\quad r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{B}_1)=r,\quad \boldsymbol{B}_1\in\mathbb{R}^{r\times r},\quad \boldsymbol{Q}\text{ 可逆}.\tag{4}$$

由式(3)~(4)知 $\boldsymbol{A}_1$、$\boldsymbol{B}_1$ 合同,因此 $|\boldsymbol{A}_1|$ 与 $|\boldsymbol{B}_1|$ 是同号的. 证毕.

命题3虽然不能像命题1、例1和例2那样写出打洞所用的广义初等矩阵[41],但是可能比文献[55-57]

解答要直观些.

与矩阵打洞技术相关的考研题目的多样性,表明这个矩阵方法应用的广泛前景. 当然,相对于矩阵的行列式、矩阵的秩、矩阵的等价、矩阵的合同、矩阵的相似等不同的要求,选择适当的打洞时用到的广义初等矩阵是重要的.

4 矩阵补洞及其应用

命题4 设 $\boldsymbol{A}\in\mathbf{P}^{n\times n}$ 可逆,$\boldsymbol{B}\in\mathbf{P}^{n\times t}$,$\boldsymbol{C}\in\mathbf{P}^{k\times n}$,$\boldsymbol{D}\in\mathbf{P}^{k\times t}$. 则

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_n & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{I}_k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{D}-\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D}-\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_n & \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I}_t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D}\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_n & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{I}_k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{D}-\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_n & \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I}_t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D}\end{pmatrix}.$$

由命题1和分块矩阵初等变换的逆矩阵性质容易证明命题4的结论.

文献[4,37-41,43-49]等基本遵循命题1,用初等变换得“有洞”的分块矩阵. 由于初等变换是可逆的,所以也可对“有洞”的分块矩阵用命题4进行“补洞”. 命题4是“补洞”的理论依据,在具体实施中可能难度要比直接“打洞”高一些,怎样选择 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$、$\boldsymbol{D}$ 是关键.

命题5 设 $\boldsymbol{A}\in\mathbf{P}^{n\times n}$,$l$、$t\in\mathbf{P}$ 且 $l\neq t$,则

$$r(\boldsymbol{A}-l\boldsymbol{I})+r(\boldsymbol{A}-t\boldsymbol{I})=n+r(\boldsymbol{A}-l\boldsymbol{I})(\boldsymbol{A}-t\boldsymbol{I}) \tag{5}$$

$$=n+r(\boldsymbol{A}^2-a\boldsymbol{A}+b\boldsymbol{I}),\quad l\neq t,\quad a=l+t,\quad b=lt. \tag{6}$$

证明:设广义初等矩阵

$$\boldsymbol{P}_1=\begin{pmatrix}\boldsymbol{I} & -\boldsymbol{I}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I}\end{pmatrix},\ \boldsymbol{P}_2=\begin{pmatrix}\boldsymbol{I} & \boldsymbol{0}\\ \dfrac{1}{l-t}(\boldsymbol{A}-t\boldsymbol{I}) & \boldsymbol{I}\end{pmatrix},\ \boldsymbol{Q}_1=\begin{pmatrix}\boldsymbol{I} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{I} & \boldsymbol{I}\end{pmatrix},\ \boldsymbol{Q}_2=\begin{pmatrix}\boldsymbol{I} & -\dfrac{1}{l-t}(\boldsymbol{A}-t\boldsymbol{I})\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I}\end{pmatrix},$$

由

$$\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}-l\boldsymbol{I} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}-t\boldsymbol{I}\end{pmatrix}\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{Q}_2=\begin{pmatrix}-(l-t)\boldsymbol{I} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & -\dfrac{1}{l-t}(\boldsymbol{A}-l\boldsymbol{I})(\boldsymbol{A}-t\boldsymbol{I})\end{pmatrix}$$

即知式(5)成立. 由 $(\boldsymbol{A}-l\boldsymbol{I})(\boldsymbol{A}-t\boldsymbol{I})=\boldsymbol{A}^2-(l+t)\boldsymbol{A}+lt\boldsymbol{I}$ 即有式(6)成立. 证毕.

如何应用矩阵补洞技术,近年来考研试题也出现了不少相关的题目.

例3[53] (2015年中国科学院大学、2013年北京工业大学试题)

1) 若 $\boldsymbol{A}\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 且 $\boldsymbol{A}^2=-\boldsymbol{I}$,则 $r(\boldsymbol{A}+\mathrm{i}\boldsymbol{I})$ 与 $r(\boldsymbol{A}-\mathrm{i}\boldsymbol{I})$ 满足什么关系?

2) 设 $\boldsymbol{A}\in\mathbb{R}^{n\times n}$,且 $\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{A}=3\boldsymbol{I}$. 证明 $r(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})+r(\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{I})=n$ 且 $\boldsymbol{A}$ 可对角化,同时 $\boldsymbol{A}$ 可以表示成两个可逆的实对称矩阵的乘积.

从 $\boldsymbol{A}^2=-\boldsymbol{I}\Leftrightarrow\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{I}=(\boldsymbol{A}+\mathrm{i}\boldsymbol{I})(\boldsymbol{A}-\mathrm{i}\boldsymbol{I})=\boldsymbol{0}$ 和式(5)、(6)知 $r(\boldsymbol{A}+\mathrm{i}\boldsymbol{I})+r(\boldsymbol{A}-\mathrm{i}\boldsymbol{I})=n$.

由 $\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{I}=(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})(\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{I})$,应用式(5)、(6)知 $r(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})+r(\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{I})=n$.

从 $m_{\boldsymbol{A}}(x)\mid(x^2+2x-3)$ 知 $m_{\boldsymbol{A}}(x)$ 无重根,因此 $\boldsymbol{A}$ 可对角化,即有 $\boldsymbol{Q}$ 使得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{Q}\mathrm{diag}(\boldsymbol{I}_r,-3\boldsymbol{I}_{n-r})\boldsymbol{Q}^{-1}$,$r=r(\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{I}_n)$. 由 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{Q}^{-1})^{\mathrm{T}}\mathrm{diag}(\boldsymbol{I}_r,-3\boldsymbol{I}_{n-r})\boldsymbol{Q}^{-1}$,$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}$ 都是可逆的实对称矩阵且 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{B}$. 这就是2)要求的结论.

当 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$ 时,有熟的知秩等式 $r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})=n$;当 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{I}$ 时,$r(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})+r(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I})=n$,在近年的考研试题中,有了更高要求的趋势.

例4[53] 2010年华中师范大学、2017年兰州大学、2009年上海大学、2018年上海交通大学考研试题,都是对 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 设计的,分别要求:

1) 若 $k\neq0$,则 $\boldsymbol{A}^2=k\boldsymbol{A}$ 当且仅当 $r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{A}-k\boldsymbol{I})=n$;2) 证明 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{I}=\boldsymbol{0}$ 的充要条件是 $r(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})+r(\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{I})=n$;3) 证明 $\boldsymbol{A}^2=2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}$ 当且仅当 $r(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{I})+r(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})=n$;4) 证明 $\boldsymbol{A}^2=-\boldsymbol{I}\Leftrightarrow r(\boldsymbol{A}+\mathrm{i}\boldsymbol{I})+r(\boldsymbol{A}-\mathrm{i}\boldsymbol{I})=n$.

分别从 $\boldsymbol{A}^2-k\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}-k\boldsymbol{I})=\boldsymbol{0}$,$\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{I}=(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})(\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{I})=\boldsymbol{0}$,$\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I}=(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{I})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})=\boldsymbol{0}$,$\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{I}=(\boldsymbol{A}+\mathrm{i}\boldsymbol{I})(\boldsymbol{A}-\mathrm{i}\boldsymbol{I})=\boldsymbol{0}$,由式(5)、(6)就可得相应结论.

作为命题 5 的应用,可给出很有用的正交矩阵的性质.

命题 6　设 $\boldsymbol{A}\in \mathrm{O}^{n\times n}$ 的正、负实特征值的个数分别为 t、s,非实成对共轭特征值有 k 对,则

$$r(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})+r(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I})=n+r(\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{I})\ ; \tag{7}$$

$$t=n-r(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I}),\quad s=n-r(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I}),\quad k=\frac{1}{2}r(\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{I});\quad n=t+s+2k. \tag{8}$$

证明:由式(5)~(6)可得式(7). 从文献[58]或文献[59]可得

$$\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\mathrm{diag}(\boldsymbol{I}_t,-\boldsymbol{I}_s,\boldsymbol{W}_1,\cdots,\boldsymbol{W}_k),\quad \boldsymbol{W}_j=\begin{pmatrix} a_j & b_j\\ -b_j & a_j\end{pmatrix},\quad a_j^2+b_j^2=1,\quad b_j\neq 0,\quad 1\leqslant j\leqslant k. \tag{9}$$

当 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\neq\boldsymbol{A}$ 时,从式(9)知 $k\geqslant 1$,$\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})\boldsymbol{Q}=\mathrm{diag}(\boldsymbol{0}_t,-2\boldsymbol{I}_s,\boldsymbol{W}_1-\boldsymbol{I}_2,\cdots,\boldsymbol{W}_k-\boldsymbol{I}_2)$;$\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I})\boldsymbol{Q}=\mathrm{diag}(2\boldsymbol{I}_t,\boldsymbol{0},\boldsymbol{W}_1+\boldsymbol{I}_2,\cdots,\boldsymbol{W}_k+\boldsymbol{I}_2)$,所以 $|\boldsymbol{W}_j\pm\boldsymbol{I}|=2(1\pm a_j)>0$,这样由式(7)、(9)得 $r(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})=s+2k=n-t$,$r(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I})=t+2k=n-s$,同时 $k=\frac{1}{2}(n-t-s)=\frac{1}{2}[r(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})+r(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I})-n]=\frac{1}{2}r(\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{I})$,即式(8)成立. 证毕.

文献[59-60]指出 $\boldsymbol{A}\in\mathrm{O}^{3\times 3}$ 的 $|\boldsymbol{A}|=(-1)^s$,s 为其特征值 -1 的重数. 由命题 6 可知

$$|\boldsymbol{A}|=(-1)^s=(-1)^{n-r(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I})},\quad s\ 为\ \boldsymbol{A}\in\mathrm{O}^{n\times n}\ 特征值\ -1\ 的重数. \tag{10}$$

命题 7　设 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}\in\mathrm{O}^{n\times n}$,则

$$|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}|(=-|\boldsymbol{B}|)\Leftrightarrow n-r(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\ 为偶(奇)数. \tag{11}$$

证明:由 $|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}|(=-|\boldsymbol{B}|)\Leftrightarrow|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}^{-1}|=1(=-1)\Leftrightarrow|\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{-1}|=1(=-1)$,从式(10)知

$$|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}|(=-|\boldsymbol{B}|)\Leftrightarrow -1\ 为\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{-1}\ 的偶数(奇数)重特征值. \tag{12}$$

由 $r(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=r(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{-1})$ 和式(6)、(8)、(10)、(12)得 $|\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{-1}|=(-1)^{n-r(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{-1})}=(-1)^{n-r(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})}$,即知式(11)成立. 证毕.

命题 7 曾为同济大学的考研试题[54].

命题 8　设 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}\in\mathrm{O}^{n\times n}$,如果 $r(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})$ 为奇数,则 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 不相似.

证明:从 $r(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})=r(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{-1}-\boldsymbol{I})$ 为奇数和式(8)知正交矩阵 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{-1}$ 的特征值 -1 的重数 $s=n-t-2k=r(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{-1}-\boldsymbol{I})-2k$ 为奇数;由式(10)可得 $|\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{-1}|=(-1)^s=-1$,因此 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 不相似. 证毕.

设 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 均为 2022 阶正交矩阵,已知线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{X}$ 的解空间的维数为 5(其中 X 是 2022 维列向量),问:$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 是否相似,并证明你的结论.

这是 2022 年北京理工大学的考研试题,易知它是命题 8 中取 $n=2022$ 的具体应用.

2017 年华南理工大学和 2021 厦门大学的考研试题都曾有过[53]:设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是数域 $\mathbf{P}$ 上的多项式,$(f(x),g(x))=1$,$\boldsymbol{A}\in\mathbf{P}^{n\times n}$,证明 $f(\boldsymbol{A})g(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{0}$ 当且仅当 $r(f(\boldsymbol{A}))+r(g(\boldsymbol{A}))=n$.

文献[61]对 $\mathrm{diag}(f(\boldsymbol{A}),g(\boldsymbol{A}))$ 应用“补洞”矩阵技巧,得到更一般的秩恒等式

$$r(f(\boldsymbol{A}))+r(g(\boldsymbol{A}))=r(d(\boldsymbol{A}))+r(m(\boldsymbol{A})), \tag{13}$$

其中式(13)中 $d(x)$、$m(x)$ 分别为 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的最大公因式和最小公倍式.

华南理工大学和厦门大学的试题是秩恒等式(13)中 $d(x)=1$,$m(x)=f(x)g(x)$ 的特例. 秩等式(13)的应用可见文献[62-64]等. 文献[65]对 $\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{ABC}\\ \boldsymbol{CDA} & \boldsymbol{C}\end{pmatrix}$ 应用命题 1 的打洞技术和自反广义逆、广义 Schur 补的性质得到秩等式:设 $\boldsymbol{A}\in\mathbf{P}^{m\times n}$,$\boldsymbol{C}\in\mathbf{P}^{k\times t}$,$\boldsymbol{B}\in\mathbf{P}^{n\times k}$,$\boldsymbol{D}\in\mathbf{P}^{k\times m}$,则

$$r(\boldsymbol{A})+r[(\boldsymbol{I}_k-\boldsymbol{CDAB})\boldsymbol{C}]=r(\boldsymbol{C})+r[(\boldsymbol{I}_m-\boldsymbol{ABCD})\boldsymbol{A}]. \tag{14}$$

文献[66]对 $\mathrm{diag}(\boldsymbol{A},(\boldsymbol{I}_k-\boldsymbol{CDAB})\boldsymbol{C})$ 应用“补洞”技术,再次得到式(14).

在秩等式(14)中取 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{D}=\boldsymbol{I}_n$ 可得2021年电子科技大学研究生入学试题[67]. 最近文献[68]对三个矩阵乘积的秩的 Frobenius 不等式给出的证法,实质上应用的就是命题4所描述的矩阵补洞的技术.

由上讨论可知,在重视通常的打洞技术的同时,再考虑补洞的必要性,这对全面准确的理解运用华罗庚学派的具有中国文化特色矩阵理论和方法是很有意义的.

将思政元素融入到专业课堂教学中,这方面的理论研究已经引起重视[69-71],根据高等代数课程特点融入中国元素的教学内容是很有意义的事情. 由本文的讨论可知,华罗庚的矩阵情结,他和他的弟子提出的矩阵打洞技术,如同文献[4]所说这是"矩阵计算中最基本的技巧,也是最重要、最有用的技巧",是一个结合具体教学内容的很好的切入点,对提高教学效果是很有意义的.

参考文献:

[1] 赵宏量. 华罗庚中华民族的骄傲:纪念华罗庚教授诞辰100周年[J]. 西南师范大学学报(自然科学版),2010,35(6):1-15.

[2] 张志辉,贾瑞,孙洪庆. 华罗庚与中国科大:龚昇、杨德庄先生访谈录[J]. 科学文化评论,2010,7(1):55-73.

[3] 张继平. 新世纪代数学[M]. 北京:北京大学出版社,2002:342,355-356.

[4] 孟道骥,王立云. 打洞技巧[J]. 高等数学研究,2006,9(4):15-19,75.

[5] 徐利治. 回忆我的老师华罗庚先生:纪念华老诞辰90周年[J]. 数学通报,2000(12):0-3.

[6] 冯克勤. 回忆做华罗庚研究生的日子[J]. 传承,2010(1):22-24.

[7] RICHARD B. Representation theorems and inequalities for hermitian matrices[J]. Duke Mathematical Journal,1959,26(3):485-490.

[8] 王元. 华罗庚先生永远值得我们认真学习[J]. 中学生数理化(八年级数学),2010(11):4-5.

[9] 蔡同灵. 关于华罗庚教授传记的注记[J]. 绵阳师范学院学报,2001,20(5):89-92.

[10] 华罗庚. 一个关于行列式的不等式[J]. 数学学报,1955,5(4):463-470.

[11] XU C Q,XU Z D,ZHANG F Z. Revisiting Hua-Marcus-Bellman-Ando inequalities on contractive matrices[J]. Linear Algebra Applications,2009,430(5/6):1499-1508.

[12] 王松桂,贾忠贞. 矩阵论中不等式[M]. 合肥:安徽教育出版社,1994.

[13] CHERN S S. Review on Hua's inequalities involving determinants[J]. Math Rev,1956,17:703.

[14] MARCUS M. On a determinantal inequality[J]. Amer Math Monthly,1958,65:266-268.

[15] RICHARD B. Representation theorems and inequalities for Hermitian matrices[J]. Duke Mathematical Journal,1959,26(3):485-490.

[16] ANDO T. Hua-Marcus inequalities[J]. Linear and Multilinear Algebra,1980,8(4):347-352.

[17] MARSHALL A W, OLKIN I. Inequalities: theory of majorization and its applications[M]. New York: Academic Press,1979:235.

[18] ZHANG F. Hua's inequality: new proofs, generalizations, and analogs[EB/OL]. [1998-01-07]. http://nsuworks.nova.edu/cnso_math_facpres/208.

[19] 杨忠鹏. 华罗庚行列式不等式的推广[J]. 福州大学学报(自然科学版),2006,34(5):630-632.

[20] 杨忠鹏. 关于华罗庚行列式不等式的等式条件的注记[J]. 数学的实践与认识,2006,36(4):222-225.

[21] 杨忠鹏. 华罗庚不等式的上界与下界的研究[J]. 厦门大学学报(自然科学版),2007,46(3):297-301.

[22] PAIGE C C,STYAN G P H,WANG B Y, et al. Hua's matrix equality and Schur complement[J]. International Journal of Information and Systems Sciences,2008,4(1):124-135.

[23] ANDO T. Positivity of operator-matrices of Hua-type[J]. Banach Journal of Mathematical Analysis,2008,2(2):1-8.

[24] BERNSTEIN D S. Matrix mathematics (theory, facts, and formulas(2 nd))[M]. Princeton: Princeton University Press,2009.

[25] XU G K,XU C Q,ZHANG F Z. Contractive matrices of Hua type[J]. Linear and Multilinear Algebra,2011,59(2):159-172.

[26] LIN M H,WANG Q W. Remarks on Hua's matrix equality involving generalized inverses[J]. Linear Multilinear Algebra,2011,59:1059-1067.

[27] LIN M H,WOLKOWICZ H. A general Hua-type matrix equality and its applications[EB/OL]. (2013-05-20)[2013-06-07]. http://www.math.uwaterloo.ca/~hwolkowi/henry/reports/generalhuatypematrixequal.pdf

[28] LIN M H. The Hua matrix and inequalities related to contractive matrices[J]. Linear Algebra and Its Applications,2016,511:22-30.

[29] GHAEMI M B,GHARAKHANLU N,RASSIAS T M,et al. Advances in matrix inequalities[J]. Springer Optimization and Its Applications,2021,176:223.

[30] YAN H,FENG Q. Determinantal inequalities of Hua-Marcus-Zhang type for quaternion matrices[J]. Open Mathematics,2021,19(1):562-568.

[31] 华罗庚. 计划经济大范围最优化的数学理论:(Ⅰ)量综与消耗系数方阵[J]. 科学通报,1984,29(12):705-709.

[32] HUA L K. On the mathematical theory of globally optimal planned economic system[J]. Proceedings of the National Academy

of Sciences of the United States of America,1984,81(20):6549-6553.

[33] 李帮喜,藤森赖明. 马克思-斯拉法均衡与特征值问题:摩尔-彭诺斯伪逆的一个应用[J]. 政治经济学评论,2012,3(3):114-126.

[34] 陈木法. 华罗庚经济最优化理论的新进展[J]. 应用概率统计,2022,38(2):159-178.

[35] 冯克勤. 让华罗庚教授的教育思想发扬光大[J]. 高等数学研究,2006,9(6):61-62.

[36] 侯建国. 总序[M]//李炯生,查建国,王茂新. 线性代数. 2 版. 合肥:中国科技大学出版社,2010:1-2.

[37] 李炯生,查建国. 线性代数[M]. 合肥:中国科技大学出版社,1989:150-151.

[38] 李炯生,查建国,王茂新. 线性代数[M]. 2 版. 合肥:中国科技大学出版社,2010:i-ii.

[39] 许以超. 线性代数与矩阵论[M]. 北京:高等教育出版社,1992:98.

[40] 徐利治. 大学数学解题诠释[M]. 北京:高等教育出版社,1992:282-308.

[41] 王卿文. 线性代数核心思想及应用[M]. 北京:科学出版社,2012:36.

[40] 徐利治. 大学数学解题诠释[M]. 北京:高等教育出版社,1992:282-308.

[42] 张继平. 新世纪代数学[M]. 北京:北京大学出版社,2002:342,355-356.

[43] 徐利治. 大学数学解题诠释[M]. 北京:高等教育出版社,1992:282-308.

[44] 刘志峰. 李炯生教授逝世,谢谢他带给科大学生的痛苦[EB/OL]. (2015-05-12)[2021-08-29]. http://blog.sciencenet.cn/blog-2130670-889580.html.

[45] 王翠萍. 关于矩阵打洞的一个应用[J]. 六安师专学报(综合版),1997,13(2):51-53,37.

[46] 赵晓苏,钱椿林. 矩阵“打洞”法及其应用[J]. 苏州市职业大学学报,2016,27(2):61-64,73.

[47] 陈佳宏. 关于矩阵和的秩等式[J]. 长沙大学学报,2016,30(5):1-4.

[48] 陈佳宏. 矩阵打洞方法在矩阵秩问题中的应用[J]. 喀什大学学报,2017,38(3):4-7.

[49] 李忠华. 线代杂谈丨初等变换(上)[EB/OL]. (2021-03-11)[2021-08-29]. http://dxs.moe.gov.cn/zx/a/hd_sxjm_smmkwk/210311/1610434.shtml

[50] TIAN Y G, STYAN G P H. Rank equalities for idempotent matrices with applications[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics,2006,191(1):77-97.

[51] CHEN M X, CHEN Q H, LI Q X, et al. On the open problem related to rank equalities for the sum of finitely many idempotent matrices and its applications[J/OL]. Scientific World J,2014[2014-07-15]. http://dx.doi.org/10.1155/2014/702413.

[52] PETİK T, ÖZDEMİR H. Some rank equalities for finitely many tripotent matrices[J]. Bulletin of the Iranian Mathematical Society,2017,43(5):1479-1493.

[53] 厦门大学高等代数课程网站[EB/OL]. [2021-08-29]. http://gdjpkc.xmu.edu.cn/.

[54] 陈现平高等代数公众号[Z/OL]. (2021-07-31)[2021-08-30]. https://mp.weixin.qq.com/s/XWyb_WuEaA0m48EZwJvrMw.

[55] 谢邦杰. 线性代数[M]. 北京:人民教育出版社,1978:95-97.

[56] 杨子胥. 高等代数习题解(下册)[M]. 修订版. 济南:山东科学技术出版社,2001:432-433.

[57] 林亚南,林鹭,杜妮,等. 高等代数学习辅导[M]. 北京:高等教育出版社,2020:88-89.

[58] 林志兴,杨忠鹏,陈梅香,等. 一类矩阵迹方程正交解的一些研究[J]. 延边大学学报(自然科学版),2020,46(2):115-121.

[59] 陈梅香,杨忠鹏,李雨昕,等. 3×3 正交矩阵谱的确定及其应用[J]. 福建师范大学学报(自然科学版),2020,36(4):1-8.

[60] 陈梅香,杨忠鹏,晏瑜敏,等. 迹为整数的 3×3 阶正交矩阵的谱[J]. 北华大学学报(自然科学版),2018,19(2):158-163.

[61] 林国钦,杨忠鹏,陈梅香. 矩阵多项式秩的一个恒等式及其应用[J]. 北华大学学报(自然科学版),2008,9(1):5-8.

[62] 胡付高,曾玉娥. 一类矩阵多项式秩的恒等式与应用[J]. 山东大学学报(理学版),2008,43(8):51-54.

[63] 左可正. 关于矩阵多项式秩的二个恒等式[J]. 山东大学学报(理学版),2011,46(4):90-92,97.

[64] 生玉秋,蒙慧芳. 矩阵秩的 Sylvester 不等式[J]. 中央民族大学学报(自然科学版),2021,30(3):5-8.

[65] 史及民. 关于 Schur 补应用的一点注记[J]. 应用数学学报,2002,25(2):318-321.

[66] 杨忠鹏,陈梅香. 关于矩阵秩等式研究的注记[J]. 莆田学院学报,2008,15(5):1-6.

[67] 电子科技大学 2021 年研究生入学考试试题-高等代数[EB/OL]. (2021-08-12)[2021-08-30]. https://mp.weixin.qq.com/s/LGar8BhOZo_zAfiKfrNoKg.

[68] 安军. 矩阵秩的性质及秩不等式的五种证法[J]. 高等数学研究,2020,23(4):96-99.

[69] 衡美芹,赵士银. 课程思政融入高等代数课程教学研究:以宿迁学院信息与计算科学专业为例[J]. 科技资讯,2021,19(7):127-129.

[70] 梁瑛,连冬艳. 高等代数课程思政教育教学改革的实践探索[J]. 高教学刊,2020(20):153-155.

[71] 汪定国,罗萍. 课程思政理念融入高等代数课程教学的探索与实践[J]. 科教文汇,2021(19):78-80.

【责任编辑:伍　林】

文章编号:1009-4822(2023)02-000-09　　DOI:10. 11713/j. issn. 1009-4822. 2023. 02. 00

具有可逆效应的自催化扩散模型的定性分析

刘晓慧[1],郭改慧[2]

(1. 陕西铁路工程职业技术学院基础课部,陕西 渭南　714000;
2. 陕西科技大学数学与数据科学学院,陕西 西安　710021)

摘要:在齐次 Neumann 边界条件下,研究一类具有可逆效应的自催化扩散模型. 首先,通过稳定性理论建立由扩散引起的 Turing 不稳定性;其次,利用 Crandall-Rabinowitz 局部分支理论,给出简单特征值处的分支结构;最后,采用空间分解技术和隐函数定理,证明双特征值处稳态分支的存在性.

关键词:自催化模型;Turing 不稳定性;稳态分支

中图分类号:O175. 26　　**文献标志码**:A

Qualitative Analysis of Autocatalytic Diffusion Model with Reversibility Effect

LIU Xiaohui[1],GUO Gaihui[2]

(1. *Department of Basic Course*,*Shaanxi Railway Institute*,*Weinan* 714000,*China*;
2. *School of Mathematics and Data Science*,*Shaanxi University of Science and Technology*,*Xi' an* 710021,*China*)

Abstract: An autocatalytic diffusion model with reversibility effect is studied under homogeneous Neumann boundary conditions. Firstly, the Turing instability caused by diffusion is established by the stability theory. Secondly, Crandall-Rabinowitz local bifurcation theory is used to establish the bifurcation structure at simple eigenvalues. The techniques of spatial decomposition and implicit function theorem are adopted to prove the existence of steady-state bifurcation at double eigenvalues.

Key words: autocatalytic model; Turing instability; steady-state bifurcation

0　引　　言

自催化反应中反应物和生成物的动态变化一直是国内外学者关注的焦点问题,了解自催化反应的动力学性质,对 DNA 的复制、化学振荡和斑图动力学等问题的研究具有重要作用. 1979 年,Schnackenberg[1] 提出一类自催化系统,其反应机制为

$$A\leftrightarrow U,\ U+2V\leftrightarrow 3V,\ V\rightarrow P\ , \tag{1}$$

其中A、U、V和P分别为反应物和生成物. 为探究化学反应中丰富的空间模式,众多学者致力于研究具有扩散项的系统(1),但大多仅针对系统(1) 的单向反应系统或含有一个可逆的反应系统$A\leftrightarrow U$,如文献[2-6]. 事实上,自催化反应中$U+2V\leftrightarrow 3V$才是系统(1) 的关键反应,文献[7] 研究了单向自催化反应系统$U+2V$

收稿日期:2022-11-25
基金项目:国家自然科学基金(61872227);陕西铁路工程职业技术学院科研基金项目(KY2022-48).
作者简介:刘晓慧(1996—),女,助教,主要从事微分方程及其应用研究,E-mail:1139425648qq. com.

$\to 3V$ 正平衡点的稳定性和非常数稳态解的存在性. 目前,对含有关键可逆项的研究大多关注的是系统的稳定性和极限环问题. 为探索关键可逆反应更多的动力学行为,文献[8] 在文献[7] 的基础上,研究了具有关键可逆项的自催化系统 $U + 2V \leftrightarrow 3V$ 的 Hopf 分支,无量纲化的微分方程模型为

$$\begin{cases} u_t - d_1 \Delta u = a - uv^2 + cv^3, & x \in \Omega, \\ v_t - d_2 \Delta v = uv^2 - cv^3 - bv, & x \in \Omega, \\ \partial_\nu u = \partial_\nu v = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{2}$$

其中:u 和 v 分别为关键物质 U 和 V 的无量纲浓度;d_1 和 d_2 分别为关键物质 U 和 V 的扩散系数,a、b、c、d_1、d_2 均为正常数;ν 表示单位外法向量;Δ 为拉普拉斯算子.

Turing 不稳定性是指均匀空间的稳态解在扩散空间中可能失稳,并产生非均匀的斑图. 此结论被广泛应用到生物、化学和物理等领域,如 Sel'kov 反应扩散系统[9-10] 和自催化扩散系统[11-12] 等. 本文将在文献[8] 的基础上进一步探究系统(2) 在齐次 Neumann 边界下的 Turing 不稳定性和稳态分支. 由文献[8] 可知,系统存在惟一的正平衡点(u_*, v_*),其中

$$u_* = \frac{b^3 + a^2 c}{ab}, \quad v_* = \frac{a}{b}.$$

1　Turing 不稳定性

本节,讨论系统(2) 在扩散影响下产生的 Turing 不稳定性.

在齐次 Neumann 边界条件下,算子 $-\Delta$ 的特征值 λ_k 满足 $0 = \lambda_0 < \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \lambda_3 \leqslant \cdots$,具有多重度 $n_k \geqslant 1$,特征值 λ_k 所对应的特征函数为 $\varphi_{kj}(k, j \in \mathbb{N})$. 在一维空间$(0, L)$ 中,特征值

$$\lambda_k = \left(\frac{\pi k}{L}\right)^2, \quad k \in \mathbb{N},$$

对应的特征函数具有如下形式

$$\varphi_k = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{L}}, & k = 0, \\ \sqrt{\dfrac{2}{L}} \cos\left(\dfrac{\pi k x}{L}\right), & k > 0. \end{cases}$$

假设

$$d_2 \lambda_1 < \frac{b^3 - a^2 c}{b^2},$$

那么存在一个最大正整数 k_0 使得当 $1 \leqslant k \leqslant k_0$ 时满足 $d_2 \lambda_k < (b^3 - a^2 c)/b^2$. 令

$$\tilde{d}_1 = \tilde{d}_1(a, b, c, d_1, d_2, \Omega) = \min_{1 \leqslant k \leqslant k_0} d_{1,k},$$

其中

$$d_{1,k} = \frac{a^2 (d_2 \lambda_k + b)}{\lambda_k [b^3 - a^2 c - b^2 d_2 \lambda_k]}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

定理 1　设 $b > a > c$.

(ⅰ) 若 $d_2 \lambda_1 \geqslant (b^3 - a^2 c)/b^2$ 或 $d_2 \lambda_1 < (b^3 - a^2 c)/b^2$ 且 $0 < d_1 < \tilde{d}_1$,则系统(2) 在正平衡点(u_*, v_*) 处局部渐近稳定;

(ⅱ) 若 $d_2 \lambda_1 < (b^3 - a^2 c)/b^2$ 且 $d_1 > \tilde{d}_1$,则系统(2) 在正平衡点(u_*, v_*) 处不稳定.

证明:系统(2) 在(u_*, v_*) 处的线性化系统为

$$\begin{pmatrix} u_t \\ v_t \end{pmatrix} = \boldsymbol{L} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \Delta - \dfrac{a^2}{b^2} & \dfrac{a^2 c - 2b^3}{b^2} \\ \dfrac{a^2}{b^2} & d_2 \Delta + \dfrac{b^3 - a^2 c}{b^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}.$$

令$(\boldsymbol{\Phi},\boldsymbol{\Psi})$为$\boldsymbol{L}$对应特征值$\mu$的特征函数,即$\boldsymbol{L}(\boldsymbol{\Phi},\boldsymbol{\Psi})^{\mathrm{T}}=\mu(\boldsymbol{\Phi},\boldsymbol{\Psi})^{\mathrm{T}}$,其中

$$\boldsymbol{\Phi}=\sum_{0\leqslant k<\infty,1\leqslant j\leqslant n_k}^{\infty}a_{kj}\varphi_{kj},\quad \boldsymbol{\Psi}=\sum_{0\leqslant k<\infty,1\leqslant j\leqslant n_k}^{\infty}b_{kj}\varphi_{kj}.$$

整理得

$$\sum_{0\leqslant k<\infty,1\leqslant j\leqslant n_k}^{\infty}\begin{pmatrix}-\dfrac{a^2}{b^2}-d_1\lambda_k-\mu & \dfrac{a^2c-2b^3}{b^2}\\ \dfrac{a^2}{b^2} & \dfrac{b^3-a^2c}{b^2}-d_2\lambda_k-\mu\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{kj}\\ b_{kj}\end{pmatrix}\varphi_{kj}=\boldsymbol{0}.$$

显然$\boldsymbol{L}$的所有特征值可由方程$\mu^2-P_k\mu+Q_k=0(k\geqslant 0)$的特征值给出,其中

$$P_k=\frac{b^3-a^2c-a^2}{b^2}-(d_1+d_2)\lambda_k,$$

$$Q_k=d_1d_2\lambda_k^2+\frac{a^2}{b^2}\left[d_2+\frac{a^2c-b^3}{a^2}d_1\right]\lambda_k+\frac{a^2}{b}.$$

令$c_0=(b^3-a^2)/a^2$. 当$c>c_0$时,对任意的$k\geqslant 0$,都有$P_k<0$. 此时Q_k的符号对正平衡点(u_*,v_*)的稳定性起着关键作用,可通过Q_k的符号来给出系统(2)产生 Turing 不稳定的最优条件.

(ⅰ)如果$d_2\lambda_1\geqslant(b^3-a^2c)/b^2$,$Q_k>0$,这意味着线性算子$\boldsymbol{L}$的所有特征值均具有负实部,那么正平衡点$(u_*,v_*)$局部渐近稳定. 如果$d_2\lambda_1<(b^3-a^2c)/b^2$且$0<d_1<\tilde{d}_1$,那么,当$1\leqslant k\leqslant k_0$时$d_1<d_{1,k}$且$d_2\lambda_k<(b^3-a^2c)/b^2$,这意味着对任意的$1\leqslant k\leqslant k_0$都有$Q_k>0$. 当$k>k_0$时,发现$d_2\lambda_k\geqslant(b^3-a^2c)/b^2$,所以仍然可以得到$Q_k>0$. 因此,当$k\geqslant 1$时,有$Q_k>0$,此时正平衡点$(u_*,v_*)$局部渐近稳定.

(ⅱ)如果$d_2\lambda_1<(b^3-a^2c)/b^2$且$d_1>\tilde{d}_1$,那么$d_{1,k}$在$j\in[1,k_0]$内存在最小值$d_{1,j}$,使得$d_1>d_{1,j}$,这意味着$Q_j<0$,因此正平衡点$(u_*,v_*)$不稳定.

证毕.

2 稳态分支

在一维空间$(0,L)$中将变换$(\tilde{u},\tilde{v})=(u-u_*,v-u_*)$代入系统(2),为方便计算仍用$u$、$v$表示$\tilde{u}$、$\tilde{v}$,则系统(2)变为

$$\begin{cases}-d_1u''=a-(u+u_*)(v+v_*)^2+c(v+v_*)^3, & x\in(0,L),\\ -d_2u''=(u+u_*)(v+v_*)^2-c(v+v_*)^3-bv-a, & x\in(0,L),\\ u'=v'=0, & x=0,L.\end{cases}\tag{3}$$

本节以d_1为分支参数,讨论系统(3)在(u_*,v_*)处非常数正解的分支结构.

令

$$X=\{(u,v):u,v\in W^{2,p}[0,L),u'=v'=0,x=0,L\},$$
$$Y=L^p(0,L)\times L^p(0,L).$$

定义映射$F:\mathbb{R}^+\times X\to Y$为

$$F(d_1,U)=\begin{pmatrix}d_1u''+a-(u+u_*)(v+v_*)^2+c(v+v_*)^3\\ d_2v''+(u+u_*)(v+v_*)^2-c(v+v_*)^3-bv-a\end{pmatrix},\quad U=(u,v).$$

显然$(0,0)$是系统(3)的惟一常数解,也是映射$F(d_1,U)$的常数解,即$F(d_1,(0,0))=0$. $F(d_1,U)$关于U在$(0,0)$处的 Freche't 导数为

$$\boldsymbol{L}(d_1)=F_U(d_1,(0,0))=\begin{pmatrix}d_1\Delta-\dfrac{a^2}{b^2} & \dfrac{a^2c-2b^3}{b^2}\\ \dfrac{a^2}{b^2} & d_2\Delta+\dfrac{b^3-a^2c}{b^2}\end{pmatrix}.$$

定理 2　假设 $d_2\lambda_1 < (b^3 - a^2c)/b^2$.

(ⅰ) 对任意整数 $k, j \in [1, k_0]$,当 $k \neq j$ 时都有 $d_{1,k} \neq d_{1,j}$,则 $(d_{1,k}, (0,0))$ 是方程 $F(d_1, U) = 0$ 的一个分支点. 当 $|s|$ 充分小时,方程 $F(d_1, U) = 0$ 存在一条非常数解曲线 $\Gamma_1(s) = (d_1(s), (u(s), v(s)))$,满足

$$d_1(0) = d_{1,k}, \quad (u(0), v(0)) = (0,0), \quad u(s) = s\varphi_k + o(s), \quad v(s) = sm_k\varphi_k + o(s),$$

其中 $d_1(s)$、$u(s)$、$v(s)$ 是关于 s 的连续微分函数,且

$$\varphi_k = \sqrt{\frac{2}{L}}\cos(kx), \quad m_k = \frac{a^2}{b^2 d_2\lambda_k - b^3 + a^2c}.$$

(ⅱ) 假设存在一个正整数 $k(\neq j)$ 使得 $d_{1,k} = d_{1,j} = \bar{d}_1$. 令

$$m_k = \frac{a^2}{b^2 d_2\lambda_k - b^3 + a^2c}, \quad m_k^* = \frac{2b^3 - a^2c}{b^3 - a^2c - b^2 d_2\lambda_k}, \quad \boldsymbol{\Phi}_k = \begin{pmatrix} 1 \\ m_k \end{pmatrix}\varphi_k, \tag{4}$$

$$A_1 = -\frac{2a}{b}m_k + \frac{2a^2c - b^3}{ab}m_k^2, \quad A_2 = -\frac{2a}{b}(m_k + m_j) + \frac{4a^2c - 2b^3}{ab}m_k m_j, \tag{5}$$

$$A_3 = -\frac{2a}{b}m_j + \frac{2a^2c - b^3}{ab}m_j^2, \tag{6}$$

$$X_2 := \{(u,v)^{\mathrm{T}} \in X: \int_0^L (u + m_k v)\varphi_k \mathrm{d}x = \int_0^L (u + m_j v)\varphi_j \mathrm{d}x = 0\}. \tag{7}$$

若当 $j = 2k$ 或 $k = 2j$ 时,$1 + m_k m_k^* \neq 0$, $1 + m_j m_j^* \neq 0$,则 $(\bar{d}_1, (0,0))$ 是方程 $F(d_1, U) = 0$ 的一个分支点. 当 $|\omega - \omega_0|$ 充分小时,方程 $F(d_1, U) = 0$ 存在一条非常数解曲线

$$\Gamma_2(\omega) = (d_1(\omega), s(\omega)(\cos\omega\boldsymbol{\Phi}_k + \sin\omega\boldsymbol{\Phi}_j + \boldsymbol{W}(\omega))),$$

满足 $d_1(\omega_0) = \bar{d}_1$, $s(\omega_0) = 0$, $\boldsymbol{W}(\omega_0) = 0$,其中 $d_1(\omega)$、$s(\omega)$、$\boldsymbol{W}(\omega)$ 是关于 ω 的连续可微函数,这里 ω_0 满足不等式

$$\cos\omega_0 \neq 0, \quad \tan^2\omega_0 \neq \frac{A_1(m_j^* - 1)k^2}{A_2(m_k^* - 1)j^2}, \tag{8}$$

或

$$\sin\omega_0 \neq 0, \quad \tan^2\omega_0 \neq \frac{A_2(m_j^* - 1)k^2}{A_3(m_k^* - 1)j^2}. \tag{9}$$

证明:(ⅰ) 由 Crandall-Rabinowitz 分支定理[13] 可知,若 $(d_{1,k}, (0,0))$ 是分支点,则需满足以下条件:

(a) F_{d_1}、F_U 和 F_{d_1U} 存在且连续;

(b) $\dim\ker F_U(d_{1,k}, (0,0)) = \operatorname{codim} R(F_U(d_{1,k}, (0,0))) = 1$;

(c) 若 $\ker F_U(d_{1,k}, (0,0)) = \operatorname{span}\{\boldsymbol{\Phi}_k\}$,则 $F_{d_1U}(d_{1,k}, (0,0))\boldsymbol{\Phi}_k \notin R(F_U(d_{1,k}, (0,0)))$.

由线性化算子

$$\boldsymbol{L}(d_{1,k}) = F_U(d_{1,k}, (0,0)) = \begin{pmatrix} d_{1,k}\Delta - \dfrac{a^2}{b^2} & \dfrac{a^2c - 2b^3}{b^2} \\ \dfrac{a^2}{b^2} & d_2\Delta + \dfrac{b^3 - a^2c}{b^2} \end{pmatrix},$$

可知 F_{d_1}、F_U 和 F_{d_1U} 是连续的. 条件(a) 满足.

当 $\bar{d}_1 = d_{1,k}$ 时,有 $Q_k = 0$,则 $\ker\boldsymbol{L}(d_{1,k}) = \operatorname{span}\{\boldsymbol{\Phi}_k\}$,其中

$$\boldsymbol{\Phi}_k = \begin{pmatrix} 1 \\ m_k \end{pmatrix}\varphi_k, \quad m_k = \frac{a^2}{b^2 d_2\lambda_k - b^3 + a^2c}.$$

因此 $\dim\ker\boldsymbol{L}(d_{1,k})=1$. $\boldsymbol{L}(d_{1,k})$ 的伴随算子为

$$\boldsymbol{L}^*(d_{1,k})=\begin{pmatrix} d_{1,k}\Delta-\dfrac{a^2}{b^2} & \dfrac{a^2c-2b^3}{b^2} \\ \dfrac{a^2}{b^2} & d_2\Delta+\dfrac{b^3-a^2c}{b^2}\end{pmatrix},$$

同理可得

$$\ker\boldsymbol{L}^*(d_{1,k})=\operatorname{span}\{\boldsymbol{\Phi}_k^*\},\quad \boldsymbol{\Phi}_k^*=\begin{pmatrix}1\\ m_k^*\end{pmatrix}\varphi_k,$$

其中 $m_k^*=\dfrac{2b^3-a^2c}{b^3-a^2c-b^2d_2\lambda_k}$.

由 $R(\boldsymbol{L})=(\ker\boldsymbol{L}^*)^{\perp}$ 可得 $codimR(\boldsymbol{L}(d_{1,k}))=\dim\ker\boldsymbol{L}^*(d_{1,k})=1$. 条件(b) 满足.

经计算

$$F_{d_1U}(d_{1,k},(0,0))\boldsymbol{\Phi}_k=\begin{pmatrix}\Delta & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\boldsymbol{\Phi}_k=\begin{pmatrix}-m_k\lambda_k\varphi_k\\ 0\end{pmatrix},$$

且

$$\langle F_{d_1U}(d_{1,k},(0,0))\boldsymbol{\Phi}_k,\boldsymbol{\Phi}_k^*\rangle_Y=-m_km_k^*\lambda_k\neq 0,$$

所以 $F_{d_1U}(d_{1,k},(0,0))\boldsymbol{\Phi}_k\notin R(\boldsymbol{L}(d_{1,k}))$. 条件(c) 满足.

(ⅱ) 假设存在一个正整数 $k(\neq j)$ 使得 $d_{1,k}=d_{1,j}=\bar d_1$,则有

$$\ker\boldsymbol{L}(\bar d_1)=\operatorname{span}\{\boldsymbol{\Phi}_k,\boldsymbol{\Phi}_j\},\quad \ker\boldsymbol{L}^*(\bar d_1)=\operatorname{span}\{\boldsymbol{\Phi}_k^*,\boldsymbol{\Phi}_j^*\},$$

且

$$R(\boldsymbol{L}(\bar d_k))=\left\{(u,v)^{\mathrm T}\in Y:\int_0^L(u+m_k^*v)\varphi_k\mathrm{d}x=\int_0^L(u+m_j^*v)\varphi_j\mathrm{d}x=0\right\},$$

这意味着 $\dim\ker\boldsymbol{L}(\tilde d_1)=\operatorname{codim}R(\boldsymbol{L}(\tilde d_1))=2$. 此时(ⅰ)中的条件(b)不满足,Crandall-Rabinowitz 分支理论不再适用. 下面采用空间分解技术和隐函数定理来完成双重特征值处稳态分支的证明.

把映射 $F(d_1,U)$ 的线性部分和非线性部分分解为

$$F(d_1,U)=\begin{pmatrix} d_1u''+a-(u+u_*)(v+v_*)^2+c(v+v_*)^3\\ d_2v''+(u+u_*)(v+v_*)^2-c(v+v_*)^3-bv-a\end{pmatrix}=\boldsymbol{L}(d_1)\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}g^1(u,v)\\ g^2(u,v)\end{pmatrix},$$

其中 $g^2(u,v)=-g^1(u,v)$,且

$$g^1(u,v)=-\frac{2a}{b}uv+\frac{2a^2c-b^3}{ab}v^2-uv^2+cv^3+O(|u||v|^3,|v|^4).$$

把 X 分解为 $X=X_1\oplus X_2$,其中 $X_1=\operatorname{span}\{\boldsymbol{\Phi}_k,\boldsymbol{\Phi}_j\}$,$X_2$ 已在式(7) 中被定义. 下面寻找方程 $F(d_1,U)=0$ 形如

$$U=s(\cos\omega\boldsymbol{\Phi}_k+\sin\omega\boldsymbol{\Phi}_j+\boldsymbol{W}),\quad \boldsymbol{W}=(w_1,w_2)^{\mathrm T}\in X_2$$

的解,其中 s、$\omega\in\mathbb{R}$ 是参数. 在 Y 上定义算子 $\boldsymbol{P}$:

$$\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix}=\frac{1}{1+m_km_k^*}\left[\int_0^L(u+m_k^*v)\varphi_k\mathrm{d}x\right]\boldsymbol{\Phi}_k+\frac{1}{1+m_jm_j^*}\left[\int_0^L(u+m_j^*v)\varphi_j\mathrm{d}x\right]\boldsymbol{\Phi}_j.$$

显然,$R(\boldsymbol{P})=\operatorname{span}\{\boldsymbol{\Phi}_k,\boldsymbol{\Phi}_j\}=X_1\subset Y$ 且 $\boldsymbol{P}^2=\boldsymbol{P}$. 由于 $\boldsymbol{P}$ 是从 Y 到 X_1 的一个映射,故可将 Y 分解为 $Y=Y_1\oplus Y_2$,其中 $Y_1=R(\boldsymbol{P})=X_1$,$Y_2=\ker(\boldsymbol{P})=R(\boldsymbol{L}(\bar d_1))$.

固定 $\omega_0\in\mathbb{R}$,定义非线性映射 $K(d_1,s,\boldsymbol{W};\omega):\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}\times X_2\times(\omega_0-\delta,\omega_0+\delta)\to Y$ 为

$$K(d_1,s,\boldsymbol{W};\omega)=s^{-1}F(d_1,s(\cos\omega\boldsymbol{\Phi}_k+\sin\omega\boldsymbol{\Phi}_j+\boldsymbol{W}))=$$

$$\boldsymbol{L}(d_1)(\cos\omega\boldsymbol{\Phi}_k+\sin\omega\boldsymbol{\Phi}_j+\boldsymbol{W})+s\begin{pmatrix}\tilde{g}^1\\ \tilde{g}^2\end{pmatrix},$$

其中 $\tilde{g}^2=-\tilde{g}^1$ 且

$$\tilde{g}^1=-\frac{2a}{b}(\cos\omega\varphi_k+\sin\omega\varphi_j+w_1)(m_k\cos\omega\varphi_k+m_j\sin\omega\varphi_j+w_2)+$$
$$\frac{2a^2c-b^3}{ab}(m_k\cos\omega\varphi_k+m_j\sin\omega\varphi_j+w_2)^2+O(|s|).$$

显然 $K(\bar{d}_1,0,0;\omega_0)=0$. $K(d_1,s,\boldsymbol{W};\omega)$ 在$(\bar{d}_1,0,0;\omega_0)$ 处关于$(d_1,s,\boldsymbol{W})$ 的 Freche't 导数为

$$K_{(d_1,s,\boldsymbol{W})}(\bar{d}_1,0,0;\omega_0)(d_1,s,\boldsymbol{W})=\boldsymbol{L}(\bar{d}_1)\boldsymbol{W}-d_1\lambda_k\cos\omega_0\begin{pmatrix}\varphi_k\\ 0\end{pmatrix}-d_1\lambda_j\sin\omega_0\begin{pmatrix}\varphi_j\\ 0\end{pmatrix}+$$
$$sA_1\cos^2\omega_0\begin{pmatrix}\varphi_k^2\\ -\varphi_k^2\end{pmatrix}+sA_2\sin\omega_0\cos\omega_0\begin{pmatrix}\varphi_k\varphi_j\\ -\varphi_k\varphi_j\end{pmatrix}+sA_3\sin^2\omega_0\begin{pmatrix}\varphi_j^2\\ -\varphi_j^2\end{pmatrix},$$

其中 A_1、A_2、A_3 在式(5) 和式(6) 中给出.

作分解

$$\begin{pmatrix}\varphi_k\\ 0\end{pmatrix}=p_1\boldsymbol{\Phi}_k+\begin{pmatrix}u_1\\ v_1\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}\varphi_j\\ 0\end{pmatrix}=p_2\boldsymbol{\Phi}_j+\begin{pmatrix}u_2\\ v_2\end{pmatrix},$$

其中

$$\begin{pmatrix}u_1\\ v_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-p_1\\ -p_1m_k\end{pmatrix}\varphi_k,\quad p_1=\frac{1}{1+m_km_k^*}\neq 0,$$

$$\begin{pmatrix}u_2\\ v_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-p_2\\ -p_2m_j\end{pmatrix}\varphi_j,\quad p_2=\frac{1}{1+m_jm_j^*}\neq 0.$$

显然

$$\begin{pmatrix}u_1\\ v_1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}u_2\\ v_2\end{pmatrix}\in Y_2.$$

下面,分 $j=2k$ 和 $k=2j$ 两种情形来讨论.

情形 1.　当 $j=2k$ 时,有

$$\int_0^L\varphi_k^2\varphi_j\mathrm{d}x=\frac{1}{\sqrt{2L}},\quad \int_0^L\varphi_k\varphi_j^2\mathrm{d}x=0,\quad \int_0^L\varphi_k^3\mathrm{d}x=\int_0^L\varphi_j^3\mathrm{d}x=0,\quad \int_0^L\varphi_k^2\mathrm{d}x=\int_0^L\varphi_j^2\mathrm{d}x=1,$$

则

$$\begin{pmatrix}\varphi_j^2\\ -\varphi_j^2\end{pmatrix}\in Y_2.$$

进一步分解

$$\begin{pmatrix}\varphi_k^2\\ -\varphi_k^2\end{pmatrix}=p_3\boldsymbol{\Phi}_j+\begin{pmatrix}u_3\\ v_3\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}\varphi_k\varphi_j\\ -\varphi_k\varphi_j\end{pmatrix}=p_4\boldsymbol{\Phi}_k+\begin{pmatrix}u_4\\ v_4\end{pmatrix},$$

其中

$$\begin{pmatrix}u_3\\ v_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\varphi_k^2-p_3\varphi_j\\ \varphi_k^2-p_3m_j\varphi_j\end{pmatrix}\in Y_2,\quad p_3=\sqrt{\frac{1}{2L}}\frac{m_j^*-1}{m_jm_j^*+1}\neq 0,$$

$$\begin{pmatrix}u_4\\ v_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\varphi_k\varphi_j-p_4\varphi_k\\ \varphi_k\varphi_j-p_4m_k\varphi_k\end{pmatrix}\in Y_2,\quad p_4=\sqrt{\frac{1}{2L}}\frac{m_k^*-1}{m_km_k^*+1}\neq 0.$$

设 $K_{(d_1,s,\boldsymbol{W})}(d_1,0,0;\omega_0)(d_1,s,\boldsymbol{W})=\psi_1+\psi_2$,其中

$$\psi_1 = (-d_1p_1\lambda_k\cos\omega_0 + sp_4A_2\cos\omega_0\sin\omega_0)\boldsymbol{\Phi}_k + (-d_1p_2\lambda_j\sin\omega_0 + sp_3A_1\cos^2\omega_0)\boldsymbol{\Phi}_j \in Y_1,$$

$$\psi_2 = \boldsymbol{L}(\bar{d}_1)\boldsymbol{W} - d_1\lambda_k\cos\omega_0\begin{pmatrix}u_1\\v_1\end{pmatrix} - d_1\lambda_j\sin\omega_0\begin{pmatrix}u_2\\v_2\end{pmatrix} + sA_1\cos^2\omega_0\begin{pmatrix}u_3\\v_3\end{pmatrix} + sA_2\sin\omega_0\cos\omega_0\begin{pmatrix}u_4\\v_4\end{pmatrix} + sA_3\sin^2\omega_0\begin{pmatrix}\varphi_j^2\\-\varphi_j^2\end{pmatrix} \in Y_2.$$

令 $K_{(d_1,s,\boldsymbol{W})}(\bar{d}_1,0,0;\omega_0)(d_1,s,\boldsymbol{W}) = 0$,则有

$$\begin{cases}(-d_1p_1\lambda_k\cos\omega_0 + sp_4A_2\cos\omega_0\sin\omega_0)\boldsymbol{\Phi}_k + (-d_1p_2\lambda_j\sin\omega_0 + sp_3A_1\cos^2\omega_0)\boldsymbol{\Phi}_j = 0,\\ \boldsymbol{L}(\bar{d}_1)\boldsymbol{W} - d_1\lambda_k\cos\omega_0\begin{pmatrix}u_1\\v_1\end{pmatrix} - d_1\lambda_j\sin\omega_0\begin{pmatrix}u_2\\v_2\end{pmatrix} + sA_1\cos^2\omega_0\begin{pmatrix}u_3\\v_3\end{pmatrix} + sA_2\sin\omega_0\cos\omega_0\begin{pmatrix}u_4\\v_4\end{pmatrix} + \\ \quad sA_3\sin^2\omega_0\begin{pmatrix}\varphi_j^2\\-\varphi_j^2\end{pmatrix} = 0.\end{cases} \tag{10}$$

由式(8)和式(10)中的第1个等式知,$d_1 = 0$,$s = 0$. 将结果代入第2个等式得 $\boldsymbol{W} = 0$,这表明 $K_{(d_1,s,\boldsymbol{W})}(\bar{d}_1,0,0;\omega_0)$ 是一个单射.

对任意的 $(u\ v)^{\mathrm{T}} \in Y$,需有 $(d_1,s,\boldsymbol{W}) \in X$ 使得

$$K_{(d_1,s,\boldsymbol{W})}(\bar{d}_1,0,0;\omega_0)(d_1,s,\boldsymbol{W}) = \begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}. \tag{11}$$

由 Y 的分解可知,存在 α、$\beta \in \mathbb{R}$ 和 $(u_0,v_0)^{\mathrm{T}} \in Y_2$ 使得

$$\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}u_0\\v_0\end{pmatrix} + \alpha\boldsymbol{\Phi}_k + \beta\boldsymbol{\Phi}_j,$$

将上述等式代入式(11)得

$$\begin{cases}-d_1p_1\lambda_k\cos\omega_0 + sp_4A_2\cos\omega_0\sin\omega_0 = \alpha,\\ -d_1p_2\lambda_j\sin\omega_0 + sp_3A_1\cos^2\omega_0 = \beta,\\ \boldsymbol{L}(\bar{d}_1)\boldsymbol{W} - d_1\lambda_k\cos\omega_0\begin{pmatrix}u_1\\v_1\end{pmatrix} - d_1\lambda_j\sin\omega_0\begin{pmatrix}u_2\\v_2\end{pmatrix} + sA_1\cos^2\omega_0\begin{pmatrix}u_3\\v_3\end{pmatrix} + sA_2\sin\omega_0\cos\omega_0\begin{pmatrix}u_4\\v_4\end{pmatrix} + \\ \quad sA_3\sin^2\omega_0\begin{pmatrix}\varphi_j^2\\-\varphi_j^2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}u_0\\v_0\end{pmatrix}.\end{cases} \tag{12}$$

由式(8)可得

$$d_1 = \hat{d}_1 := \frac{\alpha p_3A_1\cos\omega_0 - \beta p_4A_2\sin\omega_0}{p_2p_4\lambda_jA_2\sin^2\omega_0 - p_1p_3\lambda_kA_1\cos^2\omega_0},$$

$$s = \hat{s} := \frac{\alpha p_2\lambda_j\sin\omega_0 - \beta p_1\lambda_k\cos\omega_0}{\cos\omega_0[p_2p_4\lambda_jA_2\sin^2\omega_0 - p_1p_3\lambda_kA_1\cos^2\omega_0]}.$$

将 $\hat{d}_1$、$\hat{s}$ 代入式(12)的第3个等式得

$$\boldsymbol{L}(\hat{d}_1)\boldsymbol{W} = \begin{pmatrix}u_0\\v_0\end{pmatrix} + \hat{d}_1\lambda_k\cos\omega_0\begin{pmatrix}u_1\\v_1\end{pmatrix} + \hat{d}_1\lambda_j\sin\omega_0\begin{pmatrix}u_2\\v_2\end{pmatrix} - \hat{s}A_1\cos^2\omega_0\begin{pmatrix}u_3\\v_3\end{pmatrix} - \hat{s}A_2\sin\omega_0\cos\omega_0\begin{pmatrix}u_4\\v_4\end{pmatrix} - \hat{s}A_3\sin^2\omega_0\begin{pmatrix}\varphi_j^2\\-\varphi_j^2\end{pmatrix} := \begin{pmatrix}\bar{u}\\\bar{v}\end{pmatrix} \in Y_2,$$

这意味着

$$\boldsymbol{W} = \boldsymbol{L}^{-1}\begin{pmatrix}\bar{u}\\ \bar{v}\end{pmatrix} \in Y_2.$$

此时

$$(d_1, s, \boldsymbol{W}) = \left(\hat{d}_1, \hat{s}, \boldsymbol{L}^{-1}\begin{pmatrix}\bar{u}\\ \bar{v}\end{pmatrix}\right)$$

满足式(11),这表明 $K_{(d_1,s,W)}(\bar{d}_1,0,0;\omega_0)$ 是满射.

综上,映射$K(d_1,s,\boldsymbol{W};\omega)$ 是一个同构映射. 由隐函数定理可知,当$|\omega-\omega_0|$充分小时,方程$F(d_1,(u,v))=0$存在一条非常数解曲线$(d_1(\omega),s(\omega),\boldsymbol{W}(\omega))$,其中$d_1(\omega)$、$s(\omega)$、$\boldsymbol{W}(\omega)$ 是关于ω 的连续可微函数且满足$d_1(\omega)=\bar{d}_1$,$s(\omega_0)=0$,$\boldsymbol{W}(\omega_0)=0$. 因此$F(d_1,(u,v))=0$的非常数解为$(d_1(\omega),s(\omega)(\cos\omega\boldsymbol{\Phi}_k+\sin\omega\boldsymbol{\Phi}_j+\boldsymbol{W}(\omega)))$.

情形 2.　当 $k=2j$ 时,有

$$\int_0^L \varphi_k^2\varphi_j \mathrm{d}x = 0,\quad \int_0^L \varphi_k\varphi_j^2 \mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2L}},\quad \int_0^L \varphi_k^3 \mathrm{d}x = \int_0^L \varphi_j^3 \mathrm{d}x = 0,\quad \int_0^L \varphi_k^2 \mathrm{d}x = \int_0^L \varphi_j^2 \mathrm{d}x = 0,$$

则

$$\begin{pmatrix}\varphi_k^2\\ -\varphi_k^2\end{pmatrix} \in Y_2.$$

分解

$$\begin{pmatrix}\varphi_j^2\\ -\varphi_j^2\end{pmatrix} = p_5\boldsymbol{\Phi}_k + \begin{pmatrix}u_5\\ v_5\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}\varphi_k\varphi_j\\ -\varphi_k\varphi_j\end{pmatrix} = p_6\boldsymbol{\Phi}_j + \begin{pmatrix}u_6\\ v_6\end{pmatrix},$$

其中

$$\begin{pmatrix}u_5\\ v_5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\varphi_j^2 - p_5\varphi_k\\ \varphi_j^2 - p_5 m_k\varphi_k\end{pmatrix} \in Y_2,\quad p_5 = \sqrt{\frac{1}{2L}}\frac{m_k^* - 1}{1 + m_k m_k^*} = p_4,$$

$$\begin{pmatrix}u_6\\ v_6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\varphi_k\varphi_j - p_6\varphi_j\\ \varphi_k\varphi_j - p_6 m_j\varphi_j\end{pmatrix} \in Y_2,\quad p_6 = \sqrt{\frac{1}{2L}}\frac{m_j^* - 1}{1 + m_j m_j^*} = p_3.$$

整理知

$$\begin{aligned}K_{(d_1,s,W)}(d_1,0,0;\omega_0)(d_1,s,\boldsymbol{W}) &= \boldsymbol{L}(\bar{d}_1)\boldsymbol{W} + (-d_1p_1\lambda_k\cos\omega_0 + sp_5A_3\sin^2\omega_0)\boldsymbol{\Phi}_k + \\ &(-d_1p_2\lambda_j\sin\omega_0 + sp_6A_2\sin\omega_0\cos\omega_0)\boldsymbol{\Phi}_j - d_1\lambda_k\cos\omega_0\begin{pmatrix}u_1\\ v_1\end{pmatrix} - d_1\lambda_j\sin\omega_0\begin{pmatrix}u_2\\ v_2\end{pmatrix} + \\ &sA_3\sin^2\omega_0\begin{pmatrix}u_5\\ v_5\end{pmatrix} + sA_2\sin\omega_0\cos\omega_0\begin{pmatrix}u_6\\ v_6\end{pmatrix} + sA_1\cos^2\omega_0\begin{pmatrix}\varphi_k^2\\ -\varphi_k^2\end{pmatrix},\end{aligned}$$

其中

$$\begin{pmatrix}u_1\\ v_1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}u_2\\ v_2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}u_5\\ v_5\end{pmatrix},\begin{pmatrix}u_6\\ v_6\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\varphi_k^2\\ -\varphi_k^2\end{pmatrix} \in Y_2.$$

与情形1类似,如果ω_0 满足式(9),那么$K_{(d_1,s,W)}(\bar{d}_1,0,0;\omega_0)$ 是从$\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}\times X_2$ 到Y的一个同构映射. 证毕.

3　小　　结

本文在齐次Neumann边界条件下讨论了系统(2)的Turing不稳定性和稳态分支的存在性. 结果表明,当 $d_2\lambda_1 < (b^3 - a^2c)/b^2$ 且$0 < d_1 < \tilde{d}_1$ 时,系统(2)在正平衡点处局部渐近稳定;当$d_2\lambda_1 < (b^3 - a^2c)/b^2$ 且 $d_1 > \tilde{d}_1$ 时,系统(2)在正平衡点处不稳定,可能会产生非常稳态分支.

参考文献:

[1] SCHNAKENBERG J. Simple chemical reaction systems with limit cycle behaviour[J]. Journal of Theoretical Biology,1979,81:389-400.

[2] ISHII Y. Stability analysis of spike solutions to the Schnakenberg model with heterogeneity on metric graphs[J]. Journal of Nonlinear Science,2022,32(1):1-60.

[3] KOLOKOLNIKOV T,WEI J C. Pattern formation in a reaction-diffusion system with space-dependent feed rate[J]. SIAM Rev,2018,60:626-645.

[4] 郭改慧,郭飞燕,李纪纯.具有饱和效应的任意阶自催化反应扩散模型的Turing不稳定性和Hopf分支[J].吉林大学学报(理学版),2023,61(1):15-22.

[5] QBAL Z,AHMED N,BALEANU D,et al. Structure preserving computational technique for fractional order Schnakenberg model[J]. Computational and Applied Mathematics,2020,39 (2):1-18.

[6] DIN Q,HAIDER K. Discretization bifurcation analysis and chaos control for Schnakenberg model[J]. Journal of Mathematical Chemistry,2020,58:1615-1649.

[7] JIA Y F,LI Y,WU J H. Qualitative analysis on positive steady-states for an autocatalytic reaction model in thermodynamics[J]. Discrete and Continuous Dynamical Systems,2017,37(9):4785-4813.

[8] 郭改慧,刘晓慧.一类自催化可逆生化反应模型的Hopf分支及其稳定性[J].数学物理学报,2021,41A(1):166-177.

[9] DU Z J,ZHANG X N,ZHU H P. Dynamics of nonconstant steady state of the Sel'kov model with saturation effect[J]. Journal of Nonlinear Science,2022,30(4):1553-1577.

[10] WANG P,GAO Y B. Turing instability and periodic solutions for the diffusive Sel'kov model with saturation effect[J]. Nonlinear Analysis:Real World Applications,2022,63:103417.

[11] YAN X P,ZHANG P,ZHANG C H. Turing instability and spatially homogeneous Hopf bifurcation in a diffusive Brusslator system[J]. Nonlinear Analysis:Modelling and Control,2020,25(4):638-657.

[12] GUO G H,LIU L,LI B F,et al. Qualitative analysis on positive steady-state solutions for an autocatalysis model with high order[J]. Nonlinear Analysis:Real World Applications,2018,41:665-691.

[13] CRANDALL M,RABINOWITZ P. Bifurcation from simple eigenvalues[J]. Journal of Functional Analysis,1971,8(2):321-340.

【责任编辑:伍　林】